1 Ogdens Lemma und das Pumping-Lemma

Lemma 1 (Ogdens Lemma). $L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}} : \forall_{z\in L,|z|\geq n} : \forall_{Markierungen\ von\ min.\ n\ Buchstaben} : \exists_{Darstellung\ z=uvwxy} :$

(i) *vx enthält mindestens einen markierten Buchstaben*

(ii) *vwx enthält höchstens n markierte Buchstaben*

(iii) $\forall_{i\geq 0} : uv^iwx^iy \in L$

Lemma 2 (Pumping-Lemma). $L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}} : \forall_{z\in L,|z|\geq n} : \exists_{Darstellung\ z=uvwxy} :$

(i) $|vx| \geq 1$

(ii) $|vx| \leq n$

(iii) $\forall_{i\geq 0} : uv^iwx^iy \in L$

Bemerkung: Der Spezialfall von Odgen's Lemma, in dem alle Buchstaben von z markiert sind, ist gerade das Pumping–Lemma.

1.1 Beispiel 1

[1] **Voraussetzungen:** $L_1 = \{a^ib^jc^k | i < j < k\}$
Behauptung: L_1 ist nicht kontextfrei.
Beweis: durch Kontraposition und Widerspruch mit Odgens Lemma, also
Wegen Odgens Lemma gilt auch: ¬Odgens Lemma-Bedingung $\Rightarrow L_1 \notin \mathcal{L}_2$
Annahme: $L_1 \in \mathcal{L}_2$
Sei n die Konstante aus Odgens Lemma.
Betrachte: $a^nb^{n+1}c^{n+2}$
Markiere a^n. Aus 1 folgt: in vx ist mindestens ein a.
2 ist immer erfüllt, da ja nur n Buchstaben markiert sind.
3 ist nicht erfüllt, da für jede Darstellung uvwxy einer der folgenden Fälle eintritt:

1. Nur a ist in vx: Dann ist $uv^nwx^ny \notin L_1$, da $a^{n+m}b^{n+1}c^{n+2} \notin L_1$, $m \geq 1$.

2. a ist in v und b ist in x: selber Fall wie 1.

3. a ist in v und b und c in x: Dann ist $uv^2wx^2y = a^{n+m}b^{c_1}(bc)^2c^{c_2} = a^{n+m}b^{c_1}bcbcc^{c_2} \notin L_1$

Das steht im Widerspruch zur Annahme $L_1 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \notin \mathcal{L}_2$ ■

[1] KIT, Theoretische Grundlagen der Informatik: Aufgabe 7.2 a

1.2 Beispiel 2

[2] **Voraussetzungen:** $L_2 = \{a^i b^j c^k d^l | i = 0 \vee j = k = l\}$
Behauptung: L_2 ist nicht kontextfrei.

Beweis 1: mit Odgens Lemma
Annahme: $L_2 \in \mathcal{L}_2$
Sei n die Konstante aus Odgens Lemma.
Betrachte: $ab^n c^n d^n$ und markiere darin $bc^n d$.
$(i) \rightarrow$ in vx ist mindestens einer der Buchstaben b, c und d.
$(ii) \rightarrow$ in vx sind höchstens zwei der Buchstaben b, c und d.
$(iii) \rightarrow uv^2wx^2y \in L_2$

Da in vx höchstens zwei der Buchstaben b, c, und d sind, und $i \neq 0$ ist $uv^2wx^2y \notin L_2$. Das steht im Widerspruch zur Annahme $L_2 \in \mathcal{L}_2$
$\Rightarrow L_2 \notin \mathcal{L}_2$ ■

Beweis 2: mit Pumping-Lemma
Seien $L_{2.1}$ und $L_{2.2}$ Sprachen über $\{a, b, c, d, \}^*$ und definiert durch:
$L_{2.1} := \{b^j c^k d^l | j, k, l \in \mathbb{N}_0\}$
$L_{2.2} := \{a^i | i \in \mathbb{N}\}$
$L_{2.3} := \{b^n c^n d^n | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Dann ist $L_2 = L_{2.1} \cup (L_{2.2} \cdot L_{2.3})$. Da alle Sprachklassen unter Vereinigung und Konkatenation abgeschlossen sind[3], reicht es zu zeigen, dass $L_{2.3} \notin \mathcal{L}_2$.
Annahme: $L_{2.3} \in \mathcal{L}_2$
Sei n die Konstante aus dem Pumping-Lemma.
Betrachte: $b^n c^n d^n$.
$(i) \rightarrow$ in vx ist mindestens einer der Buchstaben b, c und d.
$(ii) \rightarrow$ in vx sind höchstens einer der Buchstaben b, c und d.
$(iii) \rightarrow uv^2wx^2y \in L_2$

Im Wort uv^2wx^2y kommt aber genau ein Buchstabe häufiger vor als die Anderen $\Rightarrow uv^2wx^2y \notin L_{2.3}$
Widerspruch zwischen Pumping-Lemma und der Annahme $\Rightarrow L_{2.3} \notin \mathcal{L}_2$.
$\Rightarrow L_2 \notin \mathcal{L}_2$ ■

[2] TUM, THEO: Beispiel 65
[3] Sprachen, Automaten und Grammatiken: Ein Überblick