# Lernkontrolle: Lineare Algebra I

## 1 Aussagenlogik

Seien A, B und C Aussagen, für die $A \implies B$ und $B \implies C$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig?

| # | Aussage | Wahr | Falsch | Begründung |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $A \implies C$ | ☐ | ☐ | |
| 2 | $\neg A \implies C$ | ☐ | ☐ | |
| 3 | $\neg A \implies \neg C$ | ☐ | ☐ | |
| 4 | $C \implies A$ | ☐ | ☐ | |
| 5 | $\neg B \implies A$ | ☐ | ☐ | |
| 6 | $\neg B \implies \neg A$ | ☐ | ☐ | |
| 7 | $\neg C \implies A$ | ☐ | ☐ | |
| 8 | $\neg C \implies \neg A$ | ☐ | ☐ | |

## 2 Mengen

Seien A und B Mengen.

| # | Aussage | Wahr | Falsch | Begründung bzw. Gegenbeispiel |
|---|---|---|---|---|
| 9 | $\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$ | ☐ | ☐ | |
| 10 | $\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$ falls A und B endlich sind | ☐ | ☐ | |
| 11 | $A \cap B$ endlich $\implies$ $A, B$ endlich | ☐ | ☐ | |
| 12 | $A \setminus B = \emptyset \implies A = B$ | ☐ | ☐ | |
| 13 | $A \setminus B = \emptyset \implies A = B$ falls A und B endlich sind | ☐ | ☐ | |
| 14 | $\forall x \in A : x \notin B \implies A \neq B$ | ☐ | ☐ | |

## 3 Äquivalenzrelationen

Geben Sie, falls möglich, jeweils ein Beispiel für eine Menge X und eine Relation R an, für die folgende Eigenschaften gelten. Falls es nicht möglich ist, begründen Sie warum.
Ordnen Sie zusätzlich die Symbole $=, \neq, \leq, <, \geq, >, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \equiv$ ein.

| # | Aussage | Beispiele |
|---|---|---|
| 15 | R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv | |
| 16 | R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv | |
| 17 | R ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch | |
| 18 | R ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv | |
| 19 | R ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv | |
| 20 | R ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv | |
| 21 | R ist reflexiv und antisymmetrisch, aber nicht transitiv | |
| 22 | R ist antisymmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv | |

# 4 Abbildungen

Welche der folgenden Abbildungen ist surjektiv, welche injektiv?

| # | Abbildung | sur | inj | Begründung |
|---|---|---|---|---|
| 23 | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x$ | ☐ | ☐ | |
| 24 | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$ | ☐ | ☐ | |
| 25 | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^3$ | ☐ | ☐ | |
| 26 | $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$ | ☐ | ☐ | |
| 27 | $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) := x^2$ | ☐ | ☐ | |
| 28 | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := e^x$ | ☐ | ☐ | |
| 29 | $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) := log(x)$ | ☐ | ☐ | |
| 30 | $f : (-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}$<br>$f(x) := tan(x)$ | ☐ | ☐ | |
| 31 | $f$ : Hauskatzen $\to$ Mensch<br>$f(x) :=$ Besitzer$(x)$ | ☐ | ☐ | |

# 5 Körper

| # | Aussage | Wahr | Falsch | Begründung |
|---|---|---|---|---|
| 32 | $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:<br>Es gibt einen Körper mit $n$ Elementen. | ☐ | ☐ | |
| 33 | $\forall p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ und $p$ ist prim:<br>Es gibt einen Körper mit $p$ Elementen. | ☐ | ☐ | |
| 34 | $\forall p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ und $p$ ist prim:<br>Es gibt einen Körper mit $p^2$ Elementen. | ☐ | ☐ | |
| 35 | $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper. | ☐ | ☐ | 1.<br>2.<br>3.<br>4.<br>5.<br>6.<br>7.<br>8.<br>9. |
| 36 | $(\mathbb{R}, \cdot, +)$ ist ein Körper. | ☐ | ☐ | |
| 37 | $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist ein Körper. | ☐ | ☐ | |
| 38 | $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper. | ☐ | ☐ | |
| 39 | $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper. | ☐ | ☐ | |
| 40 | $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper. | ☐ | ☐ | |

## 6 Vektorräume

Im Folgenden wird Vektorraum mit VR abgekürzt. Sei V ein beliebiger VR, $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und $m, n \in \mathbb{N}$ beliebige natürliche Zahlen.

| # | Aussage | Wahr | Falsch | Begründung |
|---|---|---|---|---|
| 41 | $\mathbb{R}^3$ ist ein VR. | ☐ | ☐ | **V1**:<br>**V2**:<br>(a)<br>(b)<br>(c)<br>(d) |
| 42 | $\mathbb{K}^n$ ist ein VR. | ☐ | ☐ | |
| 43 | Die Menge aller $m \times n$ Matrizen mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein VR $(\mathbb{K}^{m \times n}, +, \cdot)$ | ☐ | ☐ | |
| 44 | Sei V die Menge aller unendlicher Folgen. Die Addition und Multiplikation seien komponentenweise definiert. $(V, +, \cdot)$ ist ein Körper. | ☐ | ☐ | |
| 45 | Für alle VR existiert eine Basis. | ☐ | ☐ | |
| 46 | Für alle VR existiert genau eine Basis. | ☐ | ☐ | |
| 47 | Es existiert ein VR, für den genau eine Basis existiert. | ☐ | ☐ | |
| 48 | Es existiert ein VR, für den unendlich viele Basisen existieren. | ☐ | ☐ | |
| 49 | Es existiert eine Basis, die unendlich viele Vektoren hat. | ☐ | ☐ | |
| 50 | Sei V eindimensional.<br>$\forall x \in V$ : x ist eine Basis von V. | ☐ | ☐ | |
| 51 | Eine Basis ist ein Erzeugendensystem. | ☐ | ☐ | |
| 52 | Basis und Erzeugendensystem sind Synonyme. | ☐ | ☐ | |
| 53 | Basis und Erzeugendensystem sind Synonyme, falls der VR nicht endlichdimensional ist. | ☐ | ☐ | |
| 54 | Eine Basis ist eine maximal linear unabhängige Menge. | ☐ | ☐ | |
| 55 | $\forall u, v, w \in V$ gilt:<br>$u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$ | ☐ | ☐ | |
| 56 | Jeder Vektor der Form $(x, x, x)$ kann zu einer Basis ergänzt werden. | ☐ | ☐ | |

## 7 Lineare Abbildungen

Seien V, W Vektorräume. Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

| # | Aussage | Wahr | Falsch | Begründung |
|---|---|---|---|---|
| 57 | $\Phi$ ist ein VR-Homomorphismus. | □ | □ | 1.<br>2. |
| 58 | Jeder Isomorphismus ist ein Automorphismus. | □ | □ | Isomorphismus := |
| 59 | Jeder Automorphismus ist ein Isomorphismus. | □ | □ | Automorphismus := |
| 60 | Jeder Endomorphismus ist ein Isomorphismus. | □ | □ | Endomorphismus := |
| 61 | $\Phi' V \to V$ ist ein Automorphismus | □ | □ | |

## 8 Dies und Das

Seien V, W Vektorräume. Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

| # | Aussage | Wahr | Falsch | Begründung |
|---|---|---|---|---|
| 62 | Jeder Vektorraum hat min. einen Eigenwert bzgl. jeder beliebigen linearen Abbildung. | □ | □ | |
| 63 | Zu jedem Eigenwert hat jeder Vektorraum min. einen Eigenvektor. | □ | □ | |