Lernkontrolle: Lineare Algebra I

1 Aussagenlogik

Seien A, B und C Aussagen, für die $A \implies B$ und $B \implies C$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig?

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
1	$A \implies C$	✓	☐	
2	$\neg A \implies C$	☐	✓	
3	$\neg A \implies \neg C$	☐	✓	
4	$C \implies A$	☐	✓	
5	$\neg B \implies A$	☐	✓	
6	$\neg B \implies \neg A$	✓	☐	
7	$\neg C \implies A$	☐	✓	
8	$\neg C \implies \neg A$	✓	☐	

2 Mengen

Seien A und B Mengen.

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung bzw. Gegenbeispiel
9	$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\|$	☐	✓	$A := \{1, 2\} \quad B := \{1\} \quad A \cup B = A = \{1, 2\}$
10	$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\|$ falls A und B endlich sind	☐	✓	siehe Frage 9
11	$A \cap B$ endlich $\implies$ A, B endlich	☐	✓	$A := \{n \in \mathbb{N} \| n$ is gerade$\}$ $B := \{n \in \mathbb{N} \| n$ is ungerade$\} \quad A \cap B = \emptyset$
12	$A \setminus B = \emptyset \implies A = B$	☐	✓	$A := \{\} \quad B := \{1\} \quad A \setminus B = \{\}$
13	$A \setminus B = \emptyset \implies A = B$ falls A und B endlich sind	☐	✓	siehe Frage 12
14	$\forall x \in A : x \notin B \implies A \neq B$	☐	✓	$A := \{\} =: B$

3 Äquivalenzrelationen

Geben Sie, falls möglich, jeweils ein Beispiel für eine Menge X und eine Relation R an, für die folgende Eigenschaften gelten. Falls es nicht möglich ist, begründen Sie warum.
Ordnen Sie zusätzlich die Symbole $=, \neq, \leq, <, \geq, >, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \equiv$ ein.

#	Aussage	Beispiele
15	R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv	$=, \Leftrightarrow, \equiv$, isEqual(), istVerwandtMit, ==
16	R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv	$\neq$
17	R ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch	$\leq, \geq, \Rightarrow$
18	R ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv	existiertVerbindung(Knoten A, Knoten B) in schlingenfreien Graphen
19	R ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv	$\leq, \geq$
20	R ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv	$=$
21	R ist reflexiv und antisymmetrisch, aber nicht transitiv	Hat jemand hier Beispiele?
22	R ist antisymmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv	$<, >$

4 Abbildungen

Welche der folgenden Abbildungen ist surjektiv, welche injektiv?

#	Abbildung	sur	inj	Begründung
23	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x$	✓	✓	
24	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$	□	□	$f(-1) = f(1)$ und $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$
25	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^3$	✓	✓	
26	$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$	□	✓	$\forall x \in \mathbb{R}^+ : x^2 \neq -1$
27	$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) := x^2$	✓	✓	
28	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := e^x$	□	✓	$\forall x, y$ mit $x \neq y : f(x) \neq f(y)$ $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \neq -1$
29	$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) := log(x)$	✓	✓	Umkehrfunktion zu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = e^x$
30	$f : (-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}$ $f(x) := tan(x)$	✓	✓	
31	f : Hauskatzen $\to$ Mensch $f(x) :=$ Besitzer(x)	□	□	Manche Menschen haben keine Katzen Manche Menschen haben mehrere Katzen

5 Körper

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
32	$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$: Es gibt einen Körper mit n Elementen.	□	✓	Nein, es gibt keinen Körper mit 6 Elementen (siehe Lineare Algebra von Albrecht Beutelspacher, S. 45, Frage 13)
33	$\forall p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ und p ist prim: Es gibt einen Körper mit p Elementen.	✓	□	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
34	$\forall p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ und p ist prim: Es gibt einen Körper mit p^2 Elementen.	□	✓	$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, mit Addition / Multiplikation ähnlich zu den Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$
35	$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	✓	□	$\text{Additive Eigenschaften} \begin{cases} \text{1. Assoziativgesetz} \\ \text{2. Kommutativgesetz} \\ \text{3. neutrales Element} \\ \text{4. Inverse} \end{cases}$ $\text{Multiplikative Eigenschaften} \begin{cases} \text{5. Assoziativgesetz} \\ \text{6. Kommutativgesetz} \\ \text{7. neutrales Element} \\ \text{8. Inverse} \end{cases}$ 9. Distributivgesetze
36	$(\mathbb{R}, \cdot, +)$ ist ein Körper.	□	□	? Hier bin ich mir noch nicht sicher
37	$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	□	✓	Inverse bzgl. Addition fehlen
38	$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	□	✓	Inverse bzgl. Multiplikation fehlen
39	$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	✓	□	
40	$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	✓	□	

6 Vektorräume

Im Folgenden wird Vektorraum mit VR abgekürzt. Sei V ein beliebiger VR, $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und $m, n \in \mathbb{N}$ beliebige natürliche Zahlen.

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
41	$\mathbb{R}^3$ ist ein VR.	✓	☐	**V1**: $(V, +)$ ist abelsche Gruppe **V2**: für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $x, y \in V$ gilt: (a) $1 \cdot x = x$ (b) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$ (c) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (d) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
42	$\mathbb{K}^n$ ist ein VR.	✓	☐	
43	Die Menge aller $m \times n$ Matrizen mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein VR $(\mathbb{K}^{m \times n}, +, \cdot)$	✓	☐	
44	Sei V die Menge aller unendlicher Folgen. Die Addition und Multiplikation seien komponentenweise definiert. $(V, +, \cdot)$ ist ein Körper.	☐	☐	Auch hier bin ich mir nicht sicher. Weiß das jemand?
45	Für alle VR existiert eine Basis.	✓	☐	
46	Für alle VR existiert genau eine Basis.	☐	✓	
47	Es existiert ein VR, für den genau eine Basis existiert.	✓	☐	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Basis: $\{1\}$
48	Es existiert ein VR, für den unendlich viele Basisen existieren.	✓	☐	z.B. der $\mathbb{R}^3$
49	Es existiert eine Basis, die unendlich viele Vektoren hat.	✓	☐	
50	Sei V eindimensional. $\forall x \in V$: x ist eine Basis von V.	☐	✓	Null-Element
51	Eine Basis ist ein Erzeugendensystem.	✓	☐	
52	Basis und Erzeugendensystem sind Synonyme.	☐	✓	Eine Basis ist ein minimales Erzeugendensystem.
53	Basis und Erzeugendensystem sind Synonyme, falls der VR nicht endlichdimensional ist.	☐	✓	Der Vektorraum der Polynome ist unendlichdimensional. Dennoch kann man zwei mal den selben Vektor in die basis stecken und hat somit kein linear unabhängiges Erzeugendensystem.
54	Eine Basis ist eine maximal linear unabhängige Menge.	✓	☐	
55	$\forall u, v, w \in V$ gilt: $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$	✓	☐	Lineare Algebra von Albrecht Beutelspacher, S. 77.
56	Jeder Vektor der Form (x, x, x) kann zu einer Basis ergänzt werden.	☐	✓	$x = 0$

7 Lineare Abbildungen

Seien V, W Vektorräume. Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
57	Φ ist ein VR-Homomorphismus.	☐	☐	1. $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ 2. $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$ Die Begriffe „lineare Abbildung“ und „VR-Homomorphismus“ sind Synomyme.
58	Jeder Isomorphismus ist ein Automorphismus.	☐	✓	Isomorphismus := Bijektiver Homomorphismus
59	Jeder Automorphismus ist ein Isomorphismus.	✓	☐	Automorphismus := Bijektiver Endomorphismus
60	Jeder Endomorphismus ist ein Isomorphismus.	☐	✓	Endomorphismus := $\Phi : V \to V$
61	$\Phi' V \to V$ ist ein Automorphismus	☐	✓	Kann stimmen, ist im Allgemeinen jedoch falsch.

8 Dies und Das

Seien V, W Vektorräume. Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
62	Jeder Vektorraum hat min. einen Eigenwert bzgl. jeder beliebigen linearen Abbildung.	☐	✓	Lineare Algebra, S.221, Frage 1.7
63	Zu jedem Eigenwert hat jeder Vektorraum min. einen Eigenvektor.	✓	☐	