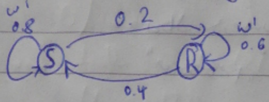
13.04.2015 – Markovketten, Bernhardt Klaus, 2.052, Spr. Do, 16:00 – 17:00

Ilias, wöchentliche Tutorien (Di + Mi), ab nächster Woche

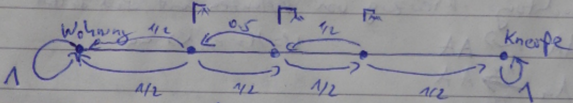
Klausur 03.08.2015, 11:00 – 13:00 || Literatur: Skript Frau Bürgle „Markovketten"
05.10.2015, "

0. Beispiele: Wettermodelle: Sonniger Tag (S) oder regnerisch (R)

(B1)



(B2) „Weg des Betrunkenen"

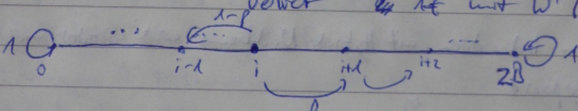


„Allgemeiner: „Ruinspiel"

2 Spieler, Startkapital $B \in \mathbb{N}$

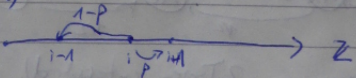
$p \in (0,1)$ in jeder Runde gewinnt Spieler 1 1€ mit W' p (von Sp. 2)

" " " verliert " 1€ mit W' $(1-p)$ " "

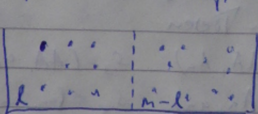


(B3) Irrfahrt: $p \in (0,1)$

Start in 0



(B4) Ehrenfest-Modell (Stoffaustausch durch Membran)



in jedem Zeitschritt genau ein Wechsel

jedes Teilchen wird mit gleicher W' gewählt

zur Zeit t: insgesamt m Teilchen

links sind l Teilchen

zu Zeit $t+1$:

links sind $\begin{cases} l-1 \text{ Teilchen mit W' } \frac{l}{m} \\ l+1 \text{ Teilchen " W' } \frac{m-l}{m} \end{cases}$

(B5) Vererbung: Merkmal ist durch ein Paar von Genen bestimmt mit Ausprägung (Allele) A und a

Individuum hat Kombination AA, Aa (= aA) oder aa

Oft: AA und Aa nicht unterscheidbar

„dominant" AA „hybrid" Aa „rezessiv"

Vererbung: zufällig je ein Gen von Vater (V) und Mutter (M) ausgewählt.

(B5a) Selbstbefruchtung: Kreuzung von Pflanzen mit sich selbst

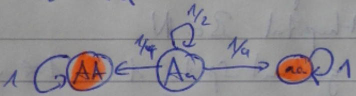
$V = M = AA \rightsquigarrow AA$ $\qquad V = M = aa \rightsquigarrow aa$

$V = M = Aa \xrightarrow{1/4} AA$

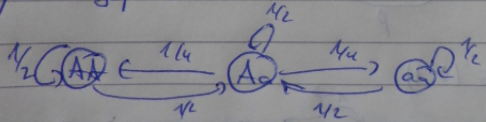
$\xrightarrow{1/4} aa$

$\xrightarrow{1/2} Aa$

Absorbierende Zustände



(B5b) Paarung von Individuen mit Hybrid-Nachkomme wird wieder mit Hybrid gepaart



(B5c) Paarung von 2 Tieren unterschiedl. Geschlechts; 2 Nachkommen unterschiedlichen Geschlechts werden ausgewählt und gepaart, ...

Hier: Zustand ≙ Paar von Tieren

$s_1 = (AA, AA)$ $\quad s_2 = (AA, Aa)$ $\quad s_3 = (AA, aa)$

$s_4 = (Aa, Aa)$ $\quad s_5 = (Aa, aa)$ $\quad s_6 = (aa, aa)$

Nachkomme von s_2:

AA mit W'keit 1/2

Aa mit W'keit 1/2

$s_2 \xrightarrow{1/4} s_1$

$s_2 \xrightarrow{1/2} s_2$

$s_2 \xrightarrow{1/4} s_4$

S. 3/4

1. Elementare Eigenschaften von Markovketten (MK)

$X_0, X_1, X_2 \ldots$ ZV'en auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X_n: \Omega \to S$, S endlich oder abzählbar unendlich

$(X_n)_{n \geq 0}$ heißt stochastischer Prozess in diskreter Zeit

1.1 Definition

(i) Eine Matrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ heißt stoch. Matrix, falls $p_{ij} \geq 0 \ \forall i,j \in S$, $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \ \forall i \in S$.

(ii) Sei P stoch. Matrix. $(X_n)_{n \geq 0}$ heißt homogene MK mit Übergangsmatrix (ÜM) P, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i_k \in S$ mit $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

identische Verteilung $= p_{i_n i_{n+1}}$

Zeithomogenität: unabhängig vom Zeitpunkt

In dieser VL: IMMER homogene MK.

p_{ij} heißen Übergangs-W' der MK, ν (Ausdruck "nü") mit $\nu(i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$, $i \in S$, heißt Startverteilung der MK.

Bem (i) (X_n) uiv ist MK. (nur Unabhängigkeit reicht nicht!)

(ii) homogen $\triangleq$ zeithomogen. Sonst Folge (P_n) von ÜM nötig

(iii) P, Q stoch. Matrizen gleicher Dimension

$\Rightarrow P \cdot Q$ ist wieder stoch. Matrix // Beweis: Tutorium

(as always: $(PQ)_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} \cdot q_{kj} \quad i,j \in S$)

1.2 Bsp

(B1)
$$\begin{array}{c|cc} & S & R \\ \hline S & 0.8 & 0.2 \\ R & 0.4 & 0.6 \end{array} \quad \text{bzw} \quad \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

(B2)
$$\begin{array}{c|ccccc} & \omega & 1 & 2 & 3 & K \\ \hline \omega & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(B4) m=5
$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

B.5a

$$\begin{array}{c} \\ AA \\ Aa \\ aa \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

B5b

$$\begin{array}{c} \\ AA \\ Aa \\ aa \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(B5c) → Tutorium

B5a und B5b haben unterschiedliches stoch. Langzeitverhalten.
B5a „endet" in AA oder „aa", B5b nicht.