3.10 Bem.: (Bestimmung der stationären Verteilung mit Computersoftware)

Sei $n := |S| < \infty$, P irreduzibel, also pos. rekurrent

Lösen von $\pi = P\pi$ bzw. $\pi(P-E) = 0$ bis auf Vielfache eindeutig

$\Rightarrow$ Rang $(P-E) = n-1$. Da alle Zeilensummen von $P-E = 0$ sind kann eine bel. Spalte gestrichen werden: $(P-E)_{(-n)}$ hat Rang $n-1$, Lösungsmenge bleibt unverändert. Normierung macht Lösung eindeutig: Spalte mit lauter Einsen anhängen!

Lösung von $\pi \underbrace{\left((P-E)_{(-n)} \vdots \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right)}_{A^T} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\substack{n-1 \\ \text{Elemente}}}, 1)$

$\text{Rang}(A^T) = n$

Im Computer: $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lösen! Lösung ist die stationäre Verteilung als Spaltenvektor

4. Konvergenz gegen die stationäre Verteilung

$\boxed{\text{4.1 Def: Seien } \mu, \nu \text{ W-Maße auf } S. \text{ Der Total-Variationsabstand } d(\mu,\nu) \text{ zwischen } \mu \text{ und } \nu \text{ ist def. durch: } d(\mu,\nu) := \sup_{A \subset S} |\mu(A) - \nu(A)|}$

4.2 Satz $d(\mu,\nu) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu(i) - \nu(i)|$.

Bew.: Sei $B := \{ i \in S : \mu(i) \geq \nu(i) \}$, $A \subset S$ beliebig.

$$\mu(A) - \nu(A) = \underbrace{\mu(AB) - \nu(AB)}_{\leq \mu(B) - \nu(B)} + \underbrace{\mu(AB^c) - \nu(AB^c)}_{\leq 0} \leq \mu(B) - \nu(B)$$

Analog: $\nu(A) - \mu(A) \leq \nu(B^c) - \mu(B^c) \overset{\text{W-Maße}}{=} \mu(B) - \nu(B)$

$\Rightarrow |\mu(A) - \nu(A)| \leq \mu(B) - \nu(B) = \nu(B^c) - \mu(B^c)$

Für $A = B$ (oder $A = B^c$) gilt Gleichheit

$\Rightarrow d(\mu,\nu) = \mu(B) - \nu(B) = \frac{1}{2}(\mu(B) - \nu(B) + \nu(B^c) - \mu(B^c))$

$= \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu(i) - \nu(i)|$ ∎

Bem:

(i) $d(\mu,\nu) \leq 1$ nach Def

(ii) Beweis zeigt: $d(\mu,\nu) = \sum_{\substack{i \in S \\ \mu(i) > \nu(i)}} (\mu(i) - \nu(i))$

4.3 Def: (X_n) sei eine MK mit ÜM P.
Die Periode des Zustands i ist gegeben durch

$$d_i := ggT\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

i heißt aperiodisch, falls $d_i = 1$ und man setzt $d_i = \infty$ falls $p_{ii}^{(n)} = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Dies ist eine Klasseneigenschaft: $j \in K(i) \Rightarrow d_j = d_i$ (vgl. Übung)

4.4 Lemma P irreduzibel und aperiodisch

$\Leftrightarrow \forall i,j \in S$ ex. $n_0 \in \mathbb{N}$: $p_{ij}^{(n)} > 0 \; \forall n \geq n_0$ (vgl. Brémaud, Markov Chains, Th 4.3)

4.5 Bsp.

(i) (B4) Ehrenfest-Modell, $m \geq 3$

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \\ m \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \frac{m-1}{m} & 0 & & \vdots \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & \frac{m-2}{m} & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{m-1}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

P hat Periode 2.

(ii) Modifikation: Mit Wkeit p bleibt das System unverändert, und mit Wkeit $(1-p)$ wechselt genau ein Teilchen $(0<p<1)$.

Also $P_{mod} = (1-p)P + p \cdot E$

P_{mod} ist aperiodisch.

4.6 Konvergenzsatz: (X_n) sei irreduzibel, aperiodisch und pos. rekurrent mit Startverteilung ν und stat. Verteilung π. Dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} d(\nu P^n, \pi) = 0$$

Insbesondere gilt:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi(j) = \frac{1}{m_j} \quad \forall i,j \in S$$

[$\nu = (0, \ldots, \underset{\uparrow\, i\text{-te Stelle}}{0, 1, 0}, \ldots)$: $\nu P^n = (p_{i1}^{(n)}, p_{i2}^{(n)}, \ldots)$, vgl. Übung]

Bew.: (Kopplungsargument)

Sei (Y_n) MK, unabh. von (X_n), gleiche ÜM P, Startverteilung π, also $Y_n \sim \pi \ \forall n \in \mathbb{N}$

Es sei $T := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = Y_n\}$ die Treffzeit der MK'n.

(i) **Beh.:** Es gilt $\mathbb{P}(T<\infty)=1$

Denn $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist MK auf S^2 mit ÜM $\hat P = (\hat p_{(ij)(kl)})$, wobei

$\hat p_{(ij)(kl)} = p_{ik}\, p_{jl}$ („Produktkette")

Weiter gilt

$$\hat p^{(n)}_{(ij)(kl)} = p^{(n)}_{ik}\, p^{(n)}_{jl} \xRightarrow{\text{Lemma 4.4}} (X_n, Y_n) \text{ ist irreduzibel + aperiodisch}$$

Setze $\hat\pi(i,j) := \pi(i)\cdot\pi(j)$. Wegen

$$\sum_{i,j\in S^2} \hat\pi(i,j)\cdot \hat p_{(ij)(kl)} = \sum_{i\in S}\pi(i)\cdot p_{ik} \cdot \sum_{j\in S}\pi(j)\cdot p_{jl}$$

$$= \pi(k)\cdot\pi(l) = \hat\pi(k,l)$$

ist $\hat\pi$ eine stat. Verteilung für (X_n, Y_n)

$\xRightarrow[3.7]{\text{Satz}} (X_n, Y_n)$ ist pos. rekurrent

Für $b\in S$ sei

$$T_{b,b} := \inf\{n\in\mathbb{N}_0 : (X_n, Y_n) = (b,b)\}$$

Offenbar ist $\mathbb{P}_{\hat\nu}(T_{(b,b)}<\infty) = 1$ und $T \le T_{(b,b)}$

$\Rightarrow \mathbb{P}_{\hat\nu}(T<\infty) = 1.$

gleiche Kette (bzw. Übergangsmatrix)

(ii) Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $Z_n = \begin{cases} X_n, & n \le T \\ Y_n, & n > T \end{cases}$ Kette wechseln, wenn beide zum ersten mal im gleichen Zustand sind

Beh.: (Z_n) ist MK mit ÜM P und $Z_0 \sim \nu$ [Bew.: Skript]

(iii) Sei nun $A \subset S$. Dann: $\nu P^n(A) = \mathbb{P}_{\hat\nu}(Z_n\in A) = \mathbb{P}_{\hat\nu}(Z_n\in A, T\le n) + \mathbb{P}_{\hat\nu}(Z_n\in A, T>n)$

$\pi P^n(A) = \pi(A) = \mathbb{P}_{\hat\nu}(Y_n\in A) = \mathbb{P}_{\hat\nu}(Y_n\in A, T\le n) + \mathbb{P}_{\hat\nu}(Y_n\in A, T>n)$

$\Rightarrow \nu P^n(A) - \pi(A) = \mathbb{P}_{\hat\nu}(Z_n\in A, T>n) - \mathbb{P}_{\hat\nu}(Y_n\in A, T>n) \le \mathbb{P}_{\hat\nu}(T>n)$,

$\pi(A) - \nu P^n(A) \le \mathbb{P}_{\hat\nu}(T>n)$

$\Rightarrow |\nu P^n(A) - \pi(A)| \le \mathbb{P}_{\hat\nu}(T>n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (wegen (i)) ∎